GRAŻYNA CZENSKOWSKA

NOWA MATURA ROZSZERZONA Z MATEMATYKI

cz 2.

CIĄGI

ŁATWA TEORIA

PRZYKŁADY Z ROZWIĄZANIAMI

ZADANIA DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZANIA

PRÓBNA MATURA Z CIĄGÓW

NOWA MATURA ROZSZERZONA

Z MATEMATYKI

cz. 2

CIĄGI

Autor: Grażyna Czenskowska

Tytuł: Nowa matura rozszerzona z matematyki

Cz 2. Ciągi

Okładka: Grażyna Czenskowska

Kontakt: graczen@wp.pl

*ISBN: **978-83-962950-3-3***

Wydanie I

Warszawa 2022

CIĄGI

(ZAKRES ROZSZERZONY)

WSTĘP

Kolekcja Nowa matura rozszerzona z matematyki przeznaczona jest dla maturzystów oraz dla osób z klas młodszych przygotowujących się do sprawdzianów z wybranego działu.

Szczególnie publikację polecam osobom, które chciałyby zdawać maturę rozszerzoną z matematyki, a w szkole przerabiają program podstawowy.

Materiał przedstawiony w poszczególnych częściach jest przystępny, dokładnie wyjaśniony i ogranicza się do treści z programu szkolnego niezbędnych do matury rozszerzonej z matematyki.

Ciągi – to druga część kolekcji Nowa matura rozszerzona z matematyki. Zajdziecie w niej teorię, wyjaśnione przykłady, zadania do samodzielnego rozwiązania a na końcu możecie się sprawdzić na próbnej maturze z ciągów.

Życzę powodzenia

Grażyna Czenskowska

POJĘCIA WSTĘPNE

DEFINICJA CIĄGU

Ciąg jest to funkcja, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych dodatnich

$$N_+ = \{1,2,3,4 \dots\}$$

Wartości tej funkcji nazywamy wyrazami ciągu i zapisujemy a_n, b_n, c_n ...

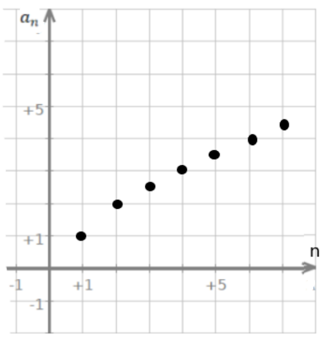
Ciąg można przedstawiać za pomocą:

wzoru ogólnego np. $a_n = (-3)^n \cdot (n+4)$

wzoru rekurencyjnego np. $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + 4 \end{cases}$

wypisując wyrazy np. $(-3, -1, 1, 3, \dots.)$

przedstawiając wykres



PRZYKŁADY

1. Oblicz trzeci wyraz ciągu

$$a_n = \frac{(-2)^n + 2}{n+1}$$

$$a_3 = \frac{(-2)^3 + 2}{3+1} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

2. Oblicz czwarty wyraz ciągu

$$a_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

$$a_4 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$$

3. Oblicz sumę trzech początkowych wyrazów ciągu określonego wzorem rekurencyjnym

$$\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_{n+1} = 2a_n - n^2 + 4 \end{cases}$$

$$a_2 = 2a_1 - 1^2 + 4 = 2 \cdot (-3) - 1 + 4 = -3$$

$$a_3 = 2a_2 - 2^2 + 4 = 2 \cdot (-3) - 4 + 4 = -6$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = -3 - 3 - 6 = -12$$

4. Wyznacz wyrazy ciągu $a_n = n^3 - 9n$ równe 0

Rozwiązanie:

Aby wyznaczyć wyrazy równe 0 należy wzór ciągu przyrównać do zera i obliczyć n $n \in N_+$.

$$n^3 - 9n = 0$$

$$n(n-3)(n+3) = 0$$

$$n = 0 \lor n = -3 \lor n = 3$$

Z trzech otrzymanych liczb tylko 3 jest liczbą naturalną dodatnią. Czyli tylko trzeci wyraz ciągu a_n jest równy 0.

Odpowiedź: $a_3 = 0$

5. Ile wyrazów ciągu $a_n = n^2 - 6n + 5$ jest ujemnych ?

Rozwiązanie:

Aby znaleźć wyrazy ujemne musimy rozwiązać nierówność

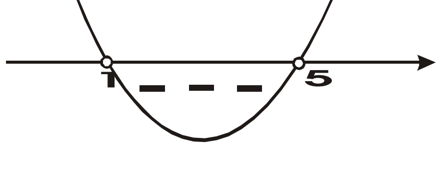
$$n^2 - 6n + 5 < 0$$

Obliczamy Δ i miejsca zerowe

$$\Delta = 36 - 20 = 16$$

$$n_1 = \frac{6-4}{2} = 1, \quad n_2 = \frac{6+4}{2} = 5$$

Rysujemy parabolę i ze zbioru rozwiązań wyznaczamy tylko liczby naturalne



dodatnie

Nierówność jest spełniona przez wszystkie liczby zawarte między 1 a 5. Wybieramy z tego zbioru liczby naturalne dodatnie i formułujemy odpowiedź.

Odpowiedź: $n \in \{2; 3; 4\}$.
W ciągu $a_n = n^2 - 6n + 5$ są trzy wyrazy ujemne.

6. Dany jest ciąg

$$a_n = n^3 + 5n^2 - n - 5$$

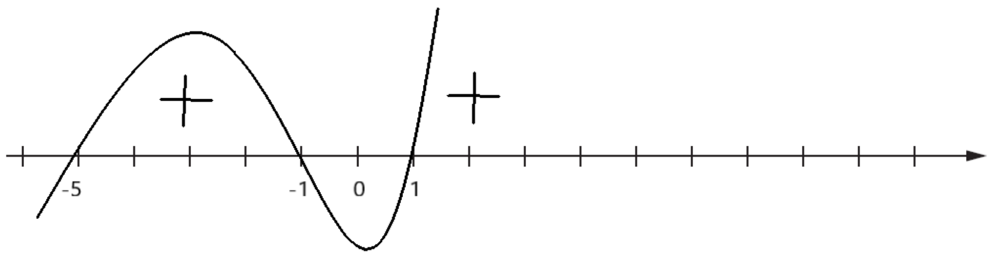
Wykaż, że wszystkie wyrazy ciągu a_n są nieujemne

Rozwiązanie

Rozwiązujemy nierówność

$$n^3 + 5n^2 - n - 5 \geq 0$$

$$(n+5)(n-1)(n+1) \geq 0$$



$n \in N_+$zatem otrzymujemy liczby {1, 2, 3, 4, …….}

Odp. Wszystkie wyrazy ciągu a_n są nieujemne

7. Dany jest ciąg

$$a_n = \frac{n^2 + 4n + 16}{n+2}$$

Wyznacz wyrazy całkowite ciągu a_n

Rozwiązanie

Przekształcamy wzór ciągu

$$a_n = \frac{n^2 + 4n + 4 + 12}{n+2} = \frac{(n+2)^2 + 12}{n+2} = \frac{(n+2)^2}{n+2} + \frac{12}{n+2}$$

$$a_n = n + 2 + \frac{12}{n+2}$$

$n \in N_+ \Rightarrow n + 2 \in N$ zatem rozpatrujemy tylko wyrażenie

$$\frac{12}{n+2}$$

To wyrażenie jest całkowite, gdy $(n+2)$ jest dzielnikiem 12

Czyli: $n+2=1 \vee n+2=2 \vee n+2=3 \vee n+2=4 \vee n+2=6 \vee n+2=12$

$$n=-1 \vee n=0 \vee n=1 \vee n=2 \vee n=4 \vee n=10$$

Zatem $n=1 \vee n=2 \vee n=4 \vee n=10$

Wyrazy całkowite

$$a_1=7, \qquad a_2=7, \qquad a_4=8, \qquad a_{10}=13$$

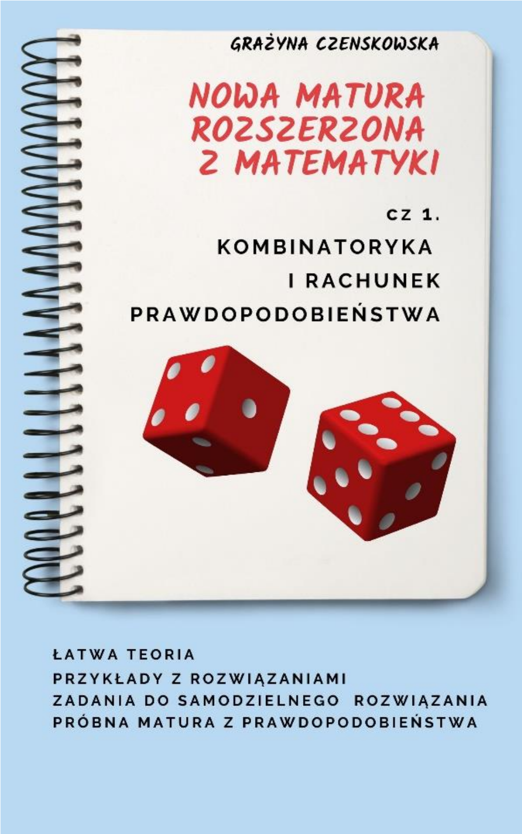
ZRÓB TO SAM

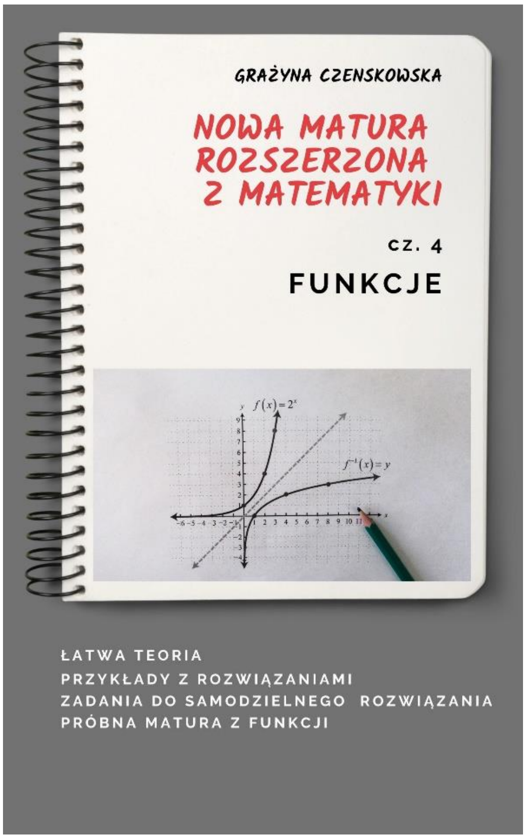
Zadanie 1.

Wykaż, że wszystkie wyrazy ciągu

$$a_n=\frac{3n^3+6n^2-3n-6}{n^2+3n+2}$$

są liczbami całkowitymi





Cz. 2 Ciągi – Grażyna Czenskowska

GRAŻYNA CZENSKOWSKA

MATURA PODSTAWOWA Z MATEMATYKI 2022...

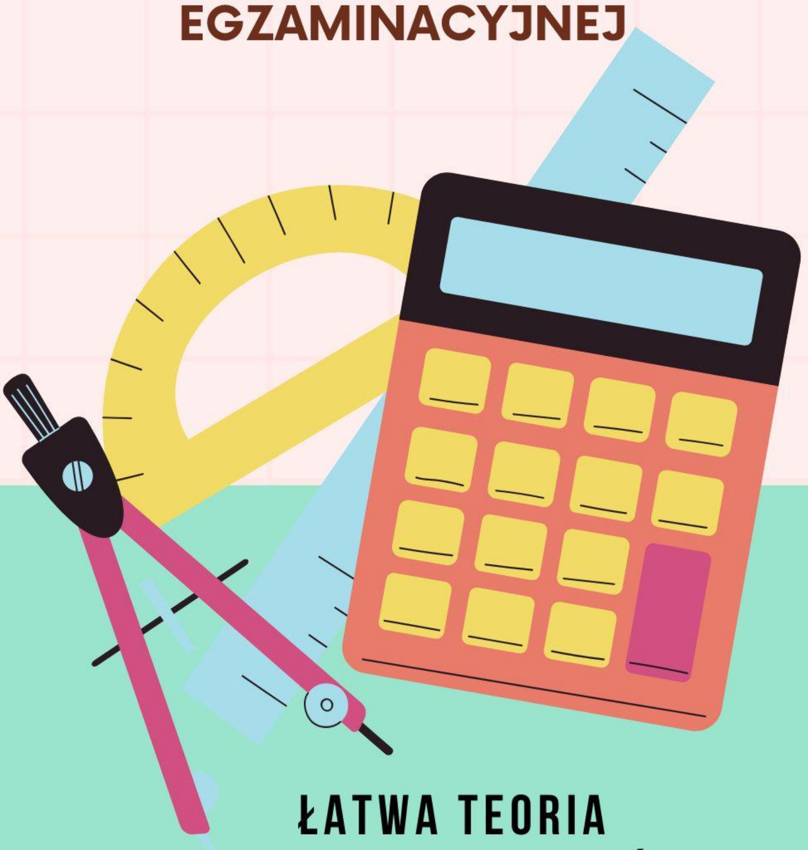
ŁATWA TEORIA
PRZYKŁADY Z ROZWIĄZANIAMI
ZADANIA DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZANIA
ARKUSZE MATURALNE
ODPOWIEDZI

Grażyna Czenskowska

NOWA MATURA
z matematyki
od 2023

zakres podstawowy

**KURS PRZYGOTOWAWCZY ZGODNY
Z ZALECENIAMI CENTRALNEJ KOMISJI
EGZAMINACYJNEJ**



**ŁATWA TEORIA
NOWE TYPY ZADAŃ
PRZYKŁADY Z ROZWIĄZANIAMI**

Grażyna Czenskowska – z wykształcenia matematyk przez wiele lat pracowała w renomowanych warszawskich liceach: VIII LO im. Władysława IV, XXXV LO im. Bolesława Prusa, NLO 81 SGH.

Swoje doświadczenie w pracy z uczniami wykorzystuje pisząc książki z dziedziny matematyki. Autorka serii pt.: „Przed klasówką i maturą z matematyki" oraz „Matura podstawowa z matematyki 2022, 2023…. i „Nowa matura podstawowa z matematyki"

Teraz ruszam z nowym cyklem książek pt. „Nowa matura rozszerzona

z matematyki"

Jest to zbiór opracowań stanowiący skuteczną pomoc w przygotowaniu się do matury rozszerzonej z matematyki.

W każdej części teoria przedstawiona jest w łatwy, przystępny sposób i poparta dokładnie wyjaśnionymi przykładami. Rozwiązując serię zadań zawartych w publikacji można skutecznie doskonalić warsztat a potem sprawdzić swoją wiedzę rozwiązując próbną maturę z danego działu zawartą w każdej części.

Kolekcja NOWA MATURA ROZSZERZONA Z MATEMATYKI składa się z następujących części:

1. Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa
2. Ciągi
3. Trygonometria
4. Funkcje
5. Rachunek różniczkowy
6. Geometria analityczna
7. Planimetria
8. Stereometria