MATEMATYKA
W PIGUŁCE

Jadwiga Nikodem
Kazimierz Nikodem

Wydawnictwo
OD. NOWA

1. JĘZYK MATEMATYCZNY

Rachunek zdań

Badaniem związków między zdaniami wypowiadanymi w matematyce zajmuje się logika matematyczna.

Zdaniem nazywamy w logice każdą wypowiedź, o której można stwierdzić, że jest prawdziwa lub fałszywa.

Zdania oznaczamy zwykle ma łymi literami: p, q, r, ... Jeśli zdanie p jest prawdziwe, to mówimy, że ma wartość logiczną 1 i piszemy w (p) =1. Jeśli zdanie p jest fałszywe, to mówimy, że ma war tość logiczną 0 i piszemy w (p)=0. Z danych zdań możemy utworzyć nowe zdania (złożone), używając słów: i; lub; jeśli ..., to; wtedy i tylko wtedy, gdy; nieprawda, że.

Zdanie: p i q nazywamy **koniunkcją** zdań p, q i oznaczamy symbolem $p \Rightarrow q$.
Zdanie: p lub q nazywamy **alternatywą** zdań p, q i oznaczamy symbolem $p \Rightarrow q$.
Zdanie: Jeśli p, to q nazywamy **implikacją** o poprzedniku p i następniku q i oznaczmy symbolem $p \Rightarrow q$. Zdanie: p wtedy i tylko wtedy, gdy q nazywamy **równoważnością** zdań p, q i oznaczmy symbolem $p \Leftrightarrow q$. Zdanie: Nieprawda, że p, nazywamy **negacją** zdania p i oznaczamy symbolem $\sim p$.

Wartości logiczne powyższych zdań złożonych zależą od wartości logicznych zdań składowych. Przyjmujemy, że koniunkcja $p \wedge q$ jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy oba zdania p, q są prawdziwe. Alternatywa $p \vee q$ jest praw dziwa wtedy i tylko wtedy, gdy choć jedno ze zdań p, q jest prawdziwe. Implikacja $p \Rightarrow q$ jest fałszywa, jeśli zdanie p jest prawdziwe, a zdanie q fałszywe; w pozo stałych przypadkach przyjmujemy, że im plikacja jest prawdziwa. Równoważność $p \Leftrightarrow q$ jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy oba zdania p, q mają tę samą wartość logiczną, tzn. oba są prawdziwe lub oba fałszywe.
Negacja $\sim p$ jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy zdanie p jest fałszywe.
Wyżej wy mienione zasady można przedstawić za pomocą tabelki wartości logicznych.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$\sim p$
1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	0	1	1	1

Prawem rachunku zdań nazywamy takie zdanie złożone, które jest zawsze praw dziwe, niezależnie od wartości logicz nych zdań składowych.

- **Prawo podwójnego przeczenia:** $p \Leftrightarrow \sim(\sim p)$
- **Prawa de Morgana:** $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$;
  $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
- **Prawo kontrapozycji:** $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$
- **Prawo zaprzeczenia implikacji:** $\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$

Formą zdaniową zmiennej x określoną w zbiorze X, nazywamy wyrażenie zawierające tę zmienną, które staje się zdaniem (prawdziwym lub fałszywym), gdy w miejsce zmiennej wstawimy dowolny element ze zbioru X.

Na przykład wyraże nie: x jest większe od 5, jest formą zdaniową okreś loną w zbiorze liczb rzeczywistych. Wstawiając za x liczbę 1, otrzymamy zdanie fałszywe, a przyjmując x= 7 – zdanie prawdziwe.

Symbol $\bigwedge_x$ nazywamy **kwantyfikatorem ogólnym** i czytamy:
dla każdego x.

Symbol $\bigvee_x$ nazywamy **kwantyfikatorem szczegółowym** i czytamy:
istnieje x takie, że ... .

Jeśli formę zdaniową zmiennej x poprzedzimy kwantyfikatorem odnoszącym się do tej zmiennej, to otrzymamy zdanie. Na przykład:

$\bigwedge_x (x > 5)$ – zdanie fałszywe,.

$\bigvee_x (x > 5)$ – zdanie prawdziwe.

Zaprzeczeniem zdania $\bigwedge_x p(x)$ jest zdanie $\bigvee_x \sim p(x)$.

Zaprzeczeniem zdania $\bigvee_x p(x)$ jest zdanie $\bigwedge_x \sim p(x)$.

Są to **prawa de Morgana** dla zdań z kwan tyfikatorem.

Matematyka jako nauka aksjomatyczno-dedukcyjna

Matematyka jest nauką aksjomatyczno–dedukcyjną. Oznacza to, że przyjmuje się w niej bez dokładnego określenia pewne **pojęcia pierwotne**, oraz bez dowodu pewne fakty (zwane **aksjomatami**). Wszystkie dalsze fakty (zwane **twierdzeniami**) wy prowadza się z nich za pomocą poprawnych rozumowań. Jedynym kryterium popraw ności rozumowań stosowanych w mate matyce są prawa logiki matematycznej. Wybór pojęć pierwotnych i aksjomatów może być różnorodny i zależy od sposobu przed stawienia danej teorii. Na ogół za pojęcia pierwotne przyjmuje się pojęcia intuicyjne jasne, a za aksjomaty – fakty oczywiste. Przykładami pojęć pierwotnych są: punkt, prosta, zbiór, liczba naturalna. Przy kładem aksjomatu jest przyjmowany w geometrii **aksjomat Euklidesa**, mówiący że przez każdy punkt płaszczyzny prze chodzi do kładnie jedna prosta równoległa do danej prostej. Twierdzenia matematyczne mają na ogół postać implikacji: Z⇒T. Poprzednik Z tej implikacji nazywamy **założeniem** twierdzenia, a następnik T – tezą twierdzenia. Twierdzeniem **odwrotnym** do twierdzenia Z ⇒T nazywamy twierdzenie T ⇒Z. **Kontrapozycją** twierdzenia Z ⇒T nazywamy twierdzenie ~T ⇒~Z. Twierdzenie i jego kontrapozycja są zawsze równoważne, tzn. mają tę samą wartość logiczną.

Każde twierdzenie matematyczne, które nie zostało zaliczone do aksjomatów, należy udowodnić. Dowody twierdzeń mogą mieć różną budowę. Na przykład **dowód wprost** polega na tym, aby przyjmując założenia twierdzenia za prawdziwe, wywnioskować, że teza jest prawdziwa. **Dowód nie wprost** polega na tym, że do założeń twierdzenia, które przyjmujemy za prawdziwe, dołączamy zaprzeczenie tezy. Następnie prowadzimy rozumowanie aż do otrzymania jakiejś sprzeczności (z przyjętymi założeniami, aksjomatami lub udowodnionymi wcześniej twierdzeniami). Wnioskujemy stąd, że zaprzeczenie tezy jest fałszywe, czyli teza prawdziwa. Czasami, zamiast danego twierdzenia, łatwiej jest udowodnić jego kontrapozycję i skorzystać z faktu, że oba te twierdzenia są równoważne.

2. ALGEBRA ZBIORÓW

Zbiory oznaczamy zwykle dużymi literami: A, B, C, ..., a ich elementy małymi literami: a, b, c, ... Zapis $a \in A$ oznacza, że a jest elementem zbioru A, a zapis $a \notin A$ oznacza, że a nie jest elementem zbioru A. Zbiór nie zawierający żadnego elementu nazywamy zbiorem **pustym** i oznaczamy symbolem $\varnothing$. Najczęściej zbiór określamy wymieniając wszystkie jego elementy, np. {1, 3, 5}, lub podając warunki, jakie spełniają elementy tego zbioru i tylko one, np. {x ∈ **R** : 2 úx ú 10}. W obu przypadkach używamy do zapisu nawiasu klamrowego { }. Jeśli każdy element zbioru A należy do zbioru B, to mówimy, że zbiór A zawiera się w zbiorze B i piszemy $A \subset B$. Zbiór A nazywamy wtedy **podzbiorem** zbioru B. W szczególności:

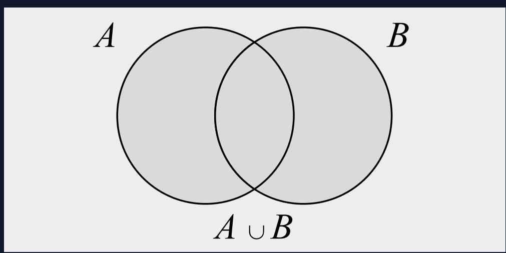
$\varnothing \subset A$ oraz $A \subset A$

Jeśli zbiory A i B składają się z tych samych elementów, to mówimy, że zbiory te są równe i piszemy A = B. Zachodzi równoważność:

$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$.

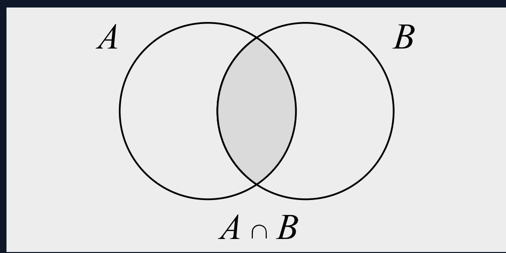
Załóżmy, że mamy dane dwa zbiory: A i B. Zbiór złożony z tych elementów, które należą do A lub do B nazywamy sumą zbiorów A i B i oznaczamy symbolem $A \cup B$. Zatem:

$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$.

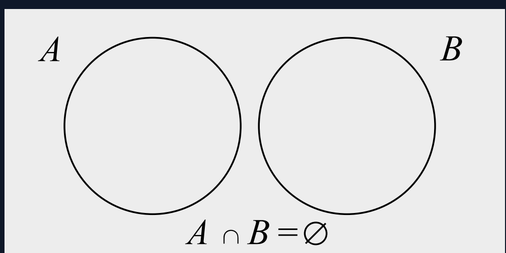


Zbiór złożony z tych elementów, które należą do A i do B nazywamy iloczynem (lub częścią wspólną) zbiorów A i B i oznaczamy symbolem $A \cap B$. Zatem:

$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$.

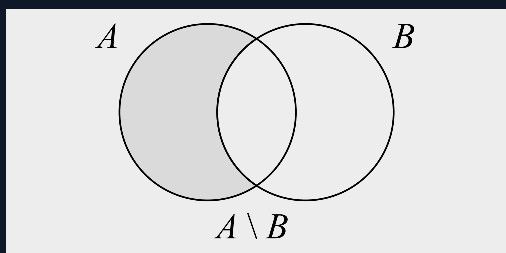


Mówimy, że zbiory A i B są rozłączne, jeśli ich iloczyn jest zbiorem pustym.



Zbiór złożony z tych elementów, które należą do A i do B nazywamy iloczynem (lub częścią wspólną) zbiorów A i B i oznaczamy symbolem A \ B. Zatem:

$x \in A \setminus B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$.



Zauważmy, że dla dowolnych zbiorów A, B zachodzą równości:

$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$,

oraz

$(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$.

Ponadto, jeśli zbiór A zawiera się w zbiorze B, to:

$A \cup B = B$, $A \cap B = A$ oraz $A \setminus B = \emptyset$.

Niech

$A = \{1, 3, 5, 7\}$ oraz $B = \{3, 5, 10\}$.

Wówczas:

$A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 10\}$, $A \cap B = \{3, 5\}$, $A \setminus B = \{1, 7\}$

oraz **$B \setminus A = \{10\}$.**

Załóżmy, że zbiór A jest podzbiorem pewnego ustalonego zbioru X zwanego przestrzenią. **Dopełnieniem** zbioru A (do przestrzeni X) nazywamy zbiór $X \setminus A$. Oznaczamy go symbolem A' .

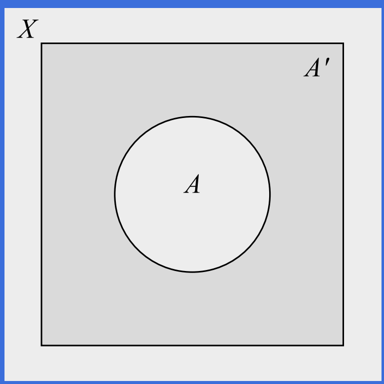
Oczywiście:

$A \cap A' = \emptyset$ oraz $A \cup A' = X$.

Zachodzą również następujące **prawa de Morgana**:

$(A \cup B)' = A' \cap B'$,

$(A \cap B)' = A' \cup B'$.



21. INDEKS

A
aksjomat 4
aksjomat ciągłości 13
aksjomat prawdopodobieństwa 88
alternatywa 3
asymptota pionowa 60
asymptota pozioma 59
asymptota ukośna 59

C
całka nieoznaczona 66
całka oznaczona 67
ciąg arytmetyczny 54
ciąg geometryczny 54
ciąg malejący 54
ciąg ograniczony 54
ciąg rosnący 54
ciągi liczbowe 53
cosinus 45
cotangens 45
czworokąt opisany na okręgu 72
czworokąt wpisany w okrąg 72
czworościan 75

D
długość wektora 78
dopełnienie zbioru 7
druga pochodna 64
dwusieczna kąta 69
działania arytmetyczne 8
dzielenie wielomianów 29

E
ekstrema funkcji 63
elipsa 82

F
forma zdaniowa 4
funkcja 16
funkcja ciągła 60
funkcja homograficzna 35
funkcja liniowa 19
funkcja logarytmiczna 42
funkcja malejąca 17
funkcja nieparzysta 17
funkcja odwrotna 18
funkcja okresowa 17
funkcja parzysta 17
funkcja pierwotna 66
funkcja potęgowa 37
funkcja rosnąca 17
funkcja różniczkowalna 62
funkcja różnowartościowa 16
funkcja wykładnicza 39
unkcja wymierna 34
funkcje logarytmiczne 41
funkcje trygonometryczne 35, 46, 48, 52

G
graniastosłup 75
granica ciągu liczbowego 55
granica funkcji 58
granica lewostronna 59
granica niewłaściwa 59
granica prawostronna 59

H
hiperbola 35,83

I
Ioczyn zbiorów 6
iloraz różnicowy 61
implikacja 3
indukcja matematyczna 53
izometria 80

K
kąt dwuścienny 74
kąt między prostą a płaszczyzną 74
kąt środkowy 68
kąt wpisany 68
kombinacje 84
koniunkcja 3
kres dolny 12
kres górny zbioru 12
krzywa logarytmiczna 42
krzywa wykładnicza 39
krzywe stożkowe 83
kula 77
kwadrat 72
kwantyfikator 4

L
liczba pierwsza 9
liczby całkowite 8
liczby naturalne 8
liczby niewymierne 8
liczby rzeczywiste 8
liczby wymierne 8
logarytm 41

M
miara łukowa 49
miejsce zerowe funkcji 17

N
najmniejsza wspólna wielokrotność 10
największy wspólny dzielnik 9
negacja 3
nierówności kwadratowe 27
nierówności liniowe 19
nierówności logarytmiczne 42
nierówności trygonometryczne 50
nierówności wykładnicze 39
nierówności wymierne 35
nierówności n-tego stopnia 32
nierówność Bernoulliego 53
nierówność trójkąta 14
niezależność zdarzeń 91

O
obrót 80
odchylenie standardowe 94
odcięta 13
odległość punktu od prostej 82
okrąg 82
okrąg i koło 68
okręgi styczne 68
ostrosłup 75 oś liczbowa 13 oś symetrii 80

P
parabola 83
permutacje 85
pierwiastki wielomianu 30
pierwiastkowanie 11
pochodna funkcji 61
pochodna funkcji złożonej 63
podobieństwo 70
podobieństwo trójkątów 70
podzbiór 6
pojęcia pierwotne 4
pola figur płaskich 73
potegowanie 37
prawa de Morgana 3, 4, 7
prawdopodobieństwo 87
prawdopodobieństwo całkowite 91
prawdopodobieństwo warunkowe 90
prosta skośna 74
prostokąt 72
prostopadłościan 75
przedziały liczbowe 13
przestrzeń probabilistyczna 88
przystawanie trójkątów 70

R
radian 49
relacja mniejszości 12
romb 72
rozkład Bernoulliego 93
rozkład jednostajny 93
rozkład na czynniki pierwsze 9
rozkład wielomianu na czynniki 30
rozkład zmiennej losowej 93
rozwinięcie dziesiętne 8
równania kwadratowe 26
równania liniowe 19
równania logarytmiczne 42
równania trygonometryczne 50
równania i nierówności wykładnicze 39
równania wymierne 35
równanie n-tego stopnia 31
równanie prostej 81
równoległobok 71
równoległościan 75
równoważność 3
różnica zbiorów 6
rzędna 13

S
schemat Bernoulliego 92
siatka znaków 32
silnia 11
sinus 45
stożek 76
styczna do okręgu 68
styczna do wykresu 62
suma szeregu geometrycznego 57
suma zbiorów 6
suma zbiorów 6
symbol Newtona 11
symetralna odcinka 69
symetria środkowa 80
symetrią osiowa 80
szereg geometryczny 57
sześcian 75

Ś
środek ciężkości trójkąta 69
środek symetrii 80
środkowa trójkąta 69

T
tangens 45
translacja 80
trapez 72
trójkąt 69
trójkąt Pascala 11
trójmian kwadratowy 24
twierdzenie 4,5
twierdzenie Bezouta 30
twierdzenie cosinusów 71
twierdzenie Pitagorasa 71
twierdzenie sinusów 71
twierdzenie Talesa 70

U
układ równań liniowych 21
układ współrzędnych 13

W
walec 76
wariacja bez powtórzeń 86
wariacja z powtórzeniami 85
wariancja 94
wartość bezwzględna 14
wartość oczekiwana 94
wektor 78
wektor swobodny 78
współczynnik kierunkowy 19, 81
współrzędne wektora 78
wykres funkcji 17
wypukła figura 72
wyróżnik trójmianu kwadratowego 25
wysokość trójkąta 69
wyznacznik 22
wzory redukcyjne 47
wzory Viete'a 27
wzór skróconego mnożenia 10

Z
zbiór pusty 6
zbiór zdarzeń elementarnych 87 zdarzenia elementarne 87 zdarzenia losowe 87
zdarzenie 87
zdarzenie niemożliwe 87 złożenie funkcji 18
zmienna losowa 93

Autorzy
Kazimierz Nikodem
Jadwiga Nikodem

Projekt składu i okładki
Weronika Kasprzak

Sklad i lamanie
Weronika Kasprzak

ISBN 978-83-67523-47-9

Wydawnictwo Od.Nowa
43-300 Bielsko -Białą
ul.Partyzantów 6/326
e mail- zamowienia@wydawnictwo-odnowa.pl